2021 届新高考基地学校高三第二次大联考
数学参考答案及讲评建议

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1~4　C D C B　　　　**5~8**　C A D A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

9． ABD　　**10．** AC　　**11．** BCD　　**12．** ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

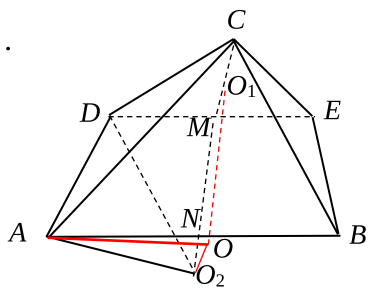
13． $\frac{3}{5}$　　**14．** 点 P 在直线 BD 上（或点 P 在经过 BD 且垂直于平面 $ABCD$ 的面上）

15． 20　　**16．** $\frac{2\sqrt{3}}{9}$，$\frac{4(17-4\sqrt{3})\pi}{9}$

【解】（1）设 M，N 分别为 DE，AB 的中点，$DE=x$，则 $AD=BE=2-x$，

$V_{C-DABE}\leqslant\frac{1}{3}S_{等腰梯形DABE}\times CM$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}(2^2-x^2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^3$，其中 $0<x<2$.



记 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^3$，$0<x<2$，

则 $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}x^2=\frac{1}{8}(2+\sqrt{3}x)(2-\sqrt{3}x)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$，此时 $f(x)_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，

所以四棱锥 $C–DABE$ 的体积的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

（2）设 O_1，O_2 分别为△CDE，等腰梯形 $DABE$ 的外接圆的圆心，

则 O_1 为 CM 的三等分点（靠 M），O_2 在直线 MN 上.

设过 O_1，O_2 分别与△CDE，等腰梯形 $DABE$ 垂直的直线交于点 O(四棱锥 $C–DABE$ 的外接球的球心)，连接 O_2A，O_2D，O_2O，O_1O，

由（1）知，等腰梯形 $DABE$ 中，$AB=2$，$DE=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$AD=BE=2-\frac{2}{\sqrt{3}}$，

$MN=\sqrt{3}-1$，则 O_2 在线段 MN 的延长线上，$O_2O=O_1M=\frac{1}{3}CM=\frac{1}{3}$.

设 $O_2N=y$，由 $AO_2{}^2=DO_2{}^2$ 得，$AN^2+O_2N^2=DM^2+MO_2{}^2$，

即 $1^2+y^2=(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+(\sqrt{3}-1+y)^2$，解得 $y=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$.

则 $AO^2=AO_2{}^2+OO_2{}^2=1^2+(\frac{2-\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{1}{3})^2=\frac{17-4\sqrt{3}}{9}$.

所以四棱锥 $C–DABE$ 的外接球的表面积 $S=4\pi\times AO^2=\frac{4(17-4\sqrt{3})\pi}{9}$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。

17．（10 分）

【解】选①：因为 $4a\sin B\cos A=\sqrt{3}b$，由正弦定理得 $4\sin A\sin B\cos A=\sqrt{3}\sin B$， …… 2 分

所以 $B\in(0，\pi)$，所以 $\sin B\neq0$，

所以 $4\sin A\cos A=\sqrt{3}$， 即 $\sin 2A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， …… 3 分

又 $A\in(0，\pi)$，$2A\in(0，2\pi)$，所以 $2A=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$，即 $A=\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{\pi}{3}$. …… 5 分

因为 $\cos C=\dfrac{1}{3}$，$C\in(0，\pi)$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. …… 6 分

当 $A=\dfrac{\pi}{6}$时，$\cos B=-\cos(A+C)$

$$=-\cos(\frac{\pi}{6}+C)=-(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3})=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}，$$ …… 8 分

当 $A=\dfrac{\pi}{3}$时，$\cos B=-\cos(A+C)$

$$=-\cos(\frac{\pi}{3}+C)=-(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3})=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}，$$

因此 $\cos B$ 的值为$\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$或$\dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}$. ……10 分

选②：因为 $b\sin^2 B+c\sin^2 C=(b+c)\sin^2 A$，

由正弦定理得 $b^3+c^3=(b+c)a^2$， …… 2 分

因为 $b+c>0$，所以 $b^2+c^2-bc=a^2$， …… 4 分

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $A\in(0，\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. …… 6 分

因为 $\cos C=\dfrac{1}{3}$，$C\in(0，\pi)$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$， …… 7 分

所以 $\cos B=-\cos(A+C)$

$$=-\cos(\frac{\pi}{3}+C)=-(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3})=\frac{2\sqrt{6}-1}{6}，$$

因此 $\cos B$ 的值为$\dfrac{2\sqrt{6}-1}{6}$. ……10 分

选③：因为 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$，所以 $2\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$， …… 2 分

因为 $2\geqslant2\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geqslant2\sqrt{\dfrac{b}{a}\times\dfrac{a}{b}}=2$， …… 4 分

于是$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=2$，即 $a=b$；且 $2\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=2$，即 $\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=1$， …… 6 分

注意到 $A\in(0,\pi)$，$A+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6})$，

因此 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$， …… 8 分

于是△ABC 为等边三角形，

因此 $\cos C=\frac{1}{2}$与 $\cos C=\frac{1}{3}$相矛盾，

故△ABC 不存在． ……10 分

18．（12 分）

【解】（1）法一：由 $(n+2)a_n=3(n+1)a_{n+1}$，得 $\frac{a_{n+1}}{n+2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a_n}{n+1}$， …… 2 分

因为 $a_1=2$，所以 $\frac{a_1}{1+1}=1\neq 0$，所以 $\frac{\frac{a_{n+1}}{n+2}}{\frac{a_n}{n+1}}=\frac{1}{3}$，

所以 $\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列， …… 4 分

所以 $\frac{a_n}{n+1}=(\frac{1}{3})^{n-1}$，即 $a_n=(n+1)\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}\ \ (n\in\mathbf{N}^*)$． …… 6 分

法二：由 $(n+2)a_n=3(n+1)a_{n+1}$，得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n+1}$， …… 2 分

所以 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}$，$\frac{a_3}{a_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}$，$\frac{a_4}{a_3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}$，…，$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+1}{n}(n\geqslant 2)$，

所以 $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdots\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=(\frac{1}{3})^{n-1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\cdots\frac{n+1}{n}(n\geqslant 2)$， …… 4 分

即 $a_n=(n+1)(\frac{1}{3})^{n-1}(n\geqslant 2)$．

由于 $a_1=2$ 符合上式，所以 $a_n=(n+1)(\frac{1}{3})^{n-1}\ \ (n\in\mathbf{N}^*)$． …… 6 分

（2）法一：由 $S_n=\frac{2}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\frac{4}{3^2}+\cdots+\frac{n+1}{3^{n-1}}$，得

$$\frac{1}{3}S_n=\qquad\frac{2}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^{n-1}}+\frac{n+1}{3^n},$$

两式相减，得 $\frac{2}{3}S_n=2+\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}-\frac{n+1}{3^{n-1}}$ …… 9 分

$$=2+\frac{\frac{1}{3}\left[1-(\frac{1}{3})^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n+1}{3^n}=\frac{5}{2}-\frac{2n+5}{2\cdot 3^n},$$

所以 $S_n=\frac{15}{4}-\frac{6n+15}{4\cdot 3^n}<\frac{15}{4}$，得证． ……12 分

法二：由 $a_n=(n+1)(\frac{1}{3})^{n-1}=\frac{\frac{3}{2}n+\frac{9}{4}}{3^{n-1}}-\frac{\frac{3}{2}(n+1)+\frac{9}{4}}{3^n}$， …… 9 分

所以 $S_n=(\dfrac{\frac{3}{2}\times 1+\frac{9}{4}}{3^0}-\dfrac{\frac{3}{2}\times 2+\frac{9}{4}}{3^1})+(\dfrac{\frac{3}{2}\times 2+\frac{9}{4}}{3^1}-\dfrac{\frac{3}{2}\times 3+\frac{9}{4}}{3^2})+(\dfrac{\frac{3}{2}\times 3+\frac{9}{4}}{3^2}-\dfrac{\frac{3}{2}\times 4+\frac{9}{4}}{3^3})+$

$\cdots+[\dfrac{\frac{3}{2}\times n+\frac{9}{4}}{3^{n-1}}-\dfrac{\frac{3}{2}\times(n+1)+\frac{9}{4}}{3^n}]$

$=\dfrac{\frac{3}{2}\times 1+\frac{9}{4}}{3^0}-\dfrac{\frac{3}{2}\times(n+1)+\frac{9}{4}}{3^n}=\dfrac{15}{4}-\dfrac{6n+15}{4\cdot 3^n}<\dfrac{15}{4}$，得证. ……12 分

19.（12 分）

【解】（1）50 只大闸蟹的平均重量为：

$\dfrac{1}{50}\times(170\times 3+190\times 2+210\times 15+230\times 20+250\times 7+270\times 3)=224$， …… 3 分

所以水产品超市购进的 100 千克大闸蟹只数约为$100000\div 224\approx 446$． … 5 分

（2）X 的可能取值为 0，1，2，3， …… 6 分

概率分别为：

$P(X=0)=\dfrac{C_3^0C_7^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{6}$；$P(X=1)=\dfrac{C_3^1C_7^3}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{2}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2C_7^2}{C_{10}^4}=\dfrac{3}{10}$；$P(X=3)=\dfrac{C_3^3C_7^1}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{30}$

所以 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

……10 分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$. ……12 分

20.（12 分）

【解】（1）连结 PO，OC．因为 $PA=PB$，O 为 AB 的中点，

所以 $PO\perp AB$．

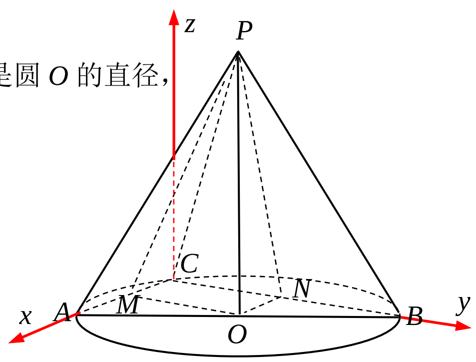
因为 C 是圆 O 上异于 A，B 的一点，AB 是圆 O 的直径，

所以 $AC\perp BC$，从而 $AO=CO$．

又因为 $PA=PC$，$PO=PO$，

所以 $\triangle PAO\cong\triangle PCO$，

所以 $\angle POC=\angle POA$，即 $PO\perp AC$．



因为 AO，$CO\subset$平面 ABC， $AO\cap CO=O$，

所以 $PO\perp$平面 ABC． …… 2 分

分别取 AC， BC 的中点 M，N，

连接 PM，OM，PN，ON，则在圆 O 中，$OM\perp AC$.

由 $PO\perp$平面 ABC，得 $PO\perp AC$.

又 $PO\cap OM=O$，故 $AC\perp$平面 PMO，

所以 $AC\perp PM$.

所以 $\angle PMO=\alpha$．

同理，$\angle PNO=\beta$． …… 4 分

于是 $\dfrac{1}{\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{\tan^2\beta}=\left(\dfrac{OM}{OP}\right)^2+\left(\dfrac{ON}{OP}\right)^2=\left(\dfrac{OC}{OP}\right)^2=\dfrac{OC^2}{AP^2-OA^2}=\dfrac{1}{2}$． …… 6 分

（2）因为 $\tan\beta=\sqrt{3}\tan\alpha$，所以 $BC=\sqrt{3}AC=2\sqrt{3}$．

在圆 O 中，$CA\perp CB$，以点 C 为坐标原点，CA 所在直线为 x 轴，CB 所在直线为 y 轴，过 C 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴建立空间直角坐标系 $C\text{-}xyz$.

则 $C(0，0，0)$，$A(2，0，0)$，$B\left(0，2\sqrt{3}，0\right)$．

又因为 $PO\perp$平面 ABC，所以 $OP//z$ 轴，从而 $P\left(1，\sqrt{3}，2\sqrt{2}\right)$.

则 $\overrightarrow{CA}=(2，0，0)$，$\overrightarrow{CB}=\left(0，2\sqrt{3}，0\right)$，$\overrightarrow{CP}=\left(1，\sqrt{3}，2\sqrt{2}\right)$. …… 8 分

设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x，y，z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=0，\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0，\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0，\\ x+\sqrt{3}y+2\sqrt{2}z=0，\end{cases}$

不妨取 $y=2\sqrt{2}$，则 $x=0$，$z=-\sqrt{3}$，此时 $\boldsymbol{m}=\left(0，2\sqrt{2}，-\sqrt{3}\right)$.

同理，平面 PBC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=\left(2\sqrt{2}，0，1\right)$. ……10 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m}，\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{11}\times 3}=-\dfrac{\sqrt{33}}{33}$．

又二面角 $A-PC-B$ 为钝二面角，

所以二面角 $A-PC-B$ 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{33}}{33}$. ……12 分

21．（12 分）

【解】（1）设 $A(\frac{y_1^2}{4}，y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{4}，y_2)$．

因为直线 AB 过点 $M(0，-1)$，

所以 $\frac{y_1+1}{\frac{y_1^2}{4}}=\frac{y_2+1}{\frac{y_2^2}{4}}$，整理得 $y_1+y_2=-y_1y_2$，　　　　…… 2 分

所以 $k_1+k_2=\frac{4}{y_1}+\frac{4}{y_2}=4\cdot\frac{y_1+y_2}{y_1y_2}=-4$．　　　　…… 4 分

（2）①当 A，B 两点在 x 轴的异侧时，$\angle AOB+\angle COD=\pi$；

②当 A，B 两点在 x 轴的同侧（只能同在下方）时，$\angle AOB=\angle COD$．…… 6 分

理由如下：

①当 A，B 两点在 x 轴的异侧时，不妨设 $y_1>0$，$y_2<0$，

直线 OA，OB 的斜率分别为 $k_1=\frac{4}{y_1}$，$k_2=\frac{4}{y_2}$，

$$\tan(\pi-\angle AOB)=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\frac{\frac{4}{y_2}-\frac{4}{y_1}}{1+\frac{16}{y_1y_2}}=\frac{4(y_1-y_2)}{y_1y_2+16}.$$

由题意，$C(-4，y_1)$，$D(-4，y_2)$，

所以直线 OC，OD 的斜率分别为 $k_{OC}=-\frac{y_1}{4}$，$k_2=-\frac{y_2}{4}$，

$$\tan(\pi-\angle COD)=\frac{k_{OC}-k_{OD}}{1+k_{OC}k_{OD}}=\frac{-\frac{y_1}{4}+\frac{y_2}{4}}{1+\frac{y_1y_2}{16}}=\frac{4(y_2-y_1)}{y_1y_2+16},$$

所以 $\tan(\pi-\angle AOB)=-\tan(\pi-\angle COD)=\tan\angle COD$．

因为 $\angle AOB$，$\angle COD\in(0，\pi)$，

所以 $\pi-\angle AOB=\angle COD$，即 $\angle AOB+\angle COD=\pi$．　　　　…… 9 分

②当 A，B 两点在 x 轴的同侧（只能同在下方）时，不妨设 $y_2<y_1<0$，

$$\tan\angle AOB=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\frac{\frac{4}{y_2}-\frac{4}{y_1}}{1+\frac{16}{y_1y_2}}=\frac{4(y_1-y_2)}{y_1y_2+16},$$

$$\tan\angle COD=\frac{k_{OD}-k_{OC}}{1+k_{OC}k_{OD}}=\frac{-\frac{y_2}{4}+\frac{y_1}{4}}{1+\frac{y_1y_2}{16}}=\frac{4(y_1-y_2)}{y_1y_2+16},$$

所以 $\tan\angle AOB=\tan\angle COD$.

因为 $\angle AOB$，$\angle COD\in(0，\pi)$，所以 $\angle AOB=\angle COD$. ……12 分

22.（12 分）

【解】（1）因为 $f(x)$ 为单调减函数，

所以 $f'(x)=-3x+6+\dfrac{3}{x\ln a}\leqslant 0$ 恒成立， …… 2 分

所以 $\dfrac{1}{\ln a}\leqslant x^2-2x$ 在 $x\in(0，+\infty)$ 上恒成立.

由于当 $x=1$ 时，$(x^2-2x)_{\min}=-1$ ，

所以 $\dfrac{1}{\ln a}\leqslant -1$，解得 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant a<1$. …… 4 分

因为 $f'(x)=-3\left[x+\dfrac{1}{x(-\ln a)}\right]+6\leqslant -6\sqrt{-\dfrac{1}{\ln a}}+6$ ，

当 $x=\sqrt{-\dfrac{1}{\ln a}}$ 时，$f'(x)$ 的最大值为 $-6\sqrt{-\dfrac{1}{\ln a}}+6$ ，

由题意，$-6\sqrt{-\dfrac{1}{\ln a}}+6\geqslant 0$ ，所以 $0<a\leqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

综上，$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. …… 6 分

（2）由（1）知，$f(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+6x-3\ln x$ ，所以 $f(1)=\dfrac{9}{2}$.

因为 $f(x_1)+f(x_2)=9$，$f(x)$ 为 $(0，+\infty)$ 单调减函数，

可设 $0<x_1\leqslant 1\leqslant x_2$. …… 8 分

令 $F(x)=f(x)+f(2-x)$，$0<x\leqslant 1$.

所以 $F'(x)=f'(x)-f'(2-x)$

$$=\left[6-3(x+\frac{1}{x})\right]-\left[6-3(2-x+\frac{1}{2-x})\right]=\frac{6(x-1)^3}{x(2-x)}\leqslant 0,$$

所以 $F(x)$ 在 $(0，1]$ 上单调递减，

所以 $F(x)\geqslant F(1)=2f(1)=9$ ，

所以 $f(x)+f(2-x)\geqslant 9$，$0<x\leqslant 1$. ……10 分

因为 $0<x_1\leqslant 1$，所以 $f(2-x_1)\geqslant 9-f(x_1)=f(x_2)$.

因为 $f(x)$ 为 $(0，+\infty)$ 单调减函数，

所以 $2-x_1\leqslant x_2$，即 $x_1+x_2\geqslant 2$. ……12 分